독립심화학습 13주차

2017103580 사회학과 김정운

이전에는 변분법 문제 Min subject to 가 있을 때, 이에 대한 최적해 x\*가 만족해야 하는 방정식을 보았다. 그 방정식을 오일러 방정식이라고 하는데, 이를 만족하는 해(또는 trajectory)들 중에서 cost function J를 최소화하는 것을 최적해라고 할 수 있다. 그리고 르장드르 필요조건은 비교해야 하는 후보를 줄여주는 조건인데, 기존 함수에서 local minimum을 찾는 방법과 비슷하다. 다만 해당 제약조건을 사용하기 위해서는 한 가지 조건이 필요하다. 르장드르 필요조건을 증명하는 과정인 에서 P(t)=, Q(t)=라고 하자.

그러면 x\*가 최적해라고 한다면, J(x\*+y)-J(x\*)=이 성립한다. 이로 인해 어느 함수 w(t)에 대해서 가 성립해야 하며, 피적분함수가 y와 y’에 대한 완전 제곱항을 갖도록 식을 변형해주면 가 된다. 그러면 y의 계수를 비교해주면 가 되기 때문에, 이를 정리하면 w’(t)=(w(t)^2/P(t))-Q(t)가 된다. 따라서 해당 미분방정식을 만족하는 해가 존재해야만, 르장드르 필요조건을 성립하는 trajectory가 optimal할 수 있다. 그리고 w의 도함수가 제곱항이 있기 때문에, 원함수와 도함수가 같게 하는 함수의 구간은 매우 짧을 수 밖에 없다. 심지어 존재하지 않을 수 있는데, 함수의 변화량이 급격하게 증가하기 때문이다.

해당 미분방정식이 성립해야 하는 이유는 기존 해석학의 정리에 부합하기 위해서 인 거 같다. 즉, 함수 f에 대한 부등식이 x\*에서 성립한다고 하면, x\*의 인근(또는 neighborhood)에 있는 모든 x에 대해 부등식이 성립해야 한다는 것이다. 미분방정식은 이와 같은 정리가 참이라는 가정 하에서 나온 것이며, 이를 만족하지 않으면 르장드르 필요조건을 만족하더라도 trajectory 자체를 채택할 수 없다는 것이다. 채택을 하면 그 trajectory는 가정을 위반하기 때문이다.

지금까지는 x와 가 [a,b]서 C2-continuous라는 가정 하에서, 최적해가 만족해야 하는 방정식들을 소개했다. 하지만 이와 같은 가정을 보다 완화시키면서 동일한 방정식을 얻고자 하는 시도들이 있었다. 그래서 이번에는 이를 어떻게 완화할 수 있는가에 대해서 설명하려고 한다. 우선 x가 립시츠 함수이고, 는 x와 x’에 대한 편미분이 존재하며 (t,x,x’)에 대해 연속이어야 한다. x가 립시츠 라는 것은 “모든 a,b에 대해 |x(a)-x(b)|<=L\*|a-b|를 만족하는 L이 존재한다”이며, 양변은 |a-b|로 나누면 “|x(a)-x(b)/|a-b|<=L”이 된다. 해당 부등식의 LHS와 도함수의 정의가 결합되면, x가 립시츠 함수이면 x의 도함수가 유계라고 추측할 수 있다. 다만, 여기서는 이를 조금 더 일반화하여 “x(t)가 립시츠 함수이면 x(t)’이 a.e하게 존재하고 essentially bounded하다”라고 설명했다.

위와 같은 조건 하에서, x\*가 최적해이면 오일러 방정식을 만족해야 한다는 정리가 여전히 성립한다. 증명과정에서 에 대한 미분이 정의되어야, 해당 정리가 성립할 수 있다. 이때 x가 [a,b]에서 연속이고 x’이 [a,b]서 essentially bounded하며 가 [a,b]에서 연속임을 통해, 가 [a,b]에서 a.e하게 유계라는 것을 알 수 있다. 이로 인해 는 a.e하게 [a,b]에서 도함수를 가질 수 있으며, 르벡적분의 정의상 오일러 방정식이 만족한다고 할 수 있다.